数の性質を見いだし考察する力を養う授業づくり
—「自然数を素数の積として表すこと」を用いる学びを例として—

菊　池　康　浩

【要　約】　新学習指導要領の実施を控え,「自然数を素数の積として表すこと」が中学校第３学年から中学校第１学年に移行された。指導のねらいが従来のものと異なり，小学校算数科で学んできた整数の性質についての理解を深めることが強調されている。

本研究では，自然数の素因数分解とのつながりを意識して，整数の性質等を見いだしたり，問題解決したりして学習するための指導計画の設計及び手立てを検討し，それらが数の性質を見いだし考察する力の育成に有効であることを示した。

【キーワード】　素数　　自然数の素因数分解　　自然数の素因数分解の有用性　　指導計画の設計
既習の数学とのつながり　　練習問題

1　主題設定の理由

人工知能が進化して，人間が活躍できる職業は少なくなるのではないか。今学校で教えていることこと　は，時代が変化したら通用しなくなるのではないか。社会の変化は加速度を増し，複雑で予測困難となってきている。このように先を見通すことが難しい急激な社会の変化の中においては，解き方があらかじめ定まった問題を効率的に解いたり，定められた手続を効率的にこなしたりする力だけでは不十分である。それだけにとどまらず，直面する様々な変化を柔軟に受け止めて，自ら問いを立て，自分なりに試行錯誤したり，多様な他者と協働したりして，答えが一つとは限らない課題に対して目的に応じた納得解を見いだす力がより一層重要になってくる。子供たちがよりよい社会と幸福な人生の創り手となるために，これからの時代に求められる資質・能力を確実に備えることのできる学校教育の具現化が私たち教師の使命である。

各学校においては，これまでの全国学力・学習状況調査等の結果を踏まえて，指導の改善・充実が進められてきたところである。特に，中学校数学科では,「数学的な表現を用いた理由の説明」に課題があると指摘されている。また，小学校算数科においても,「事柄が成り立つことを図形の性質に関連付けること」が課題の一つとして挙げられている。これは一例に過ぎないが，義務教育９年間を通じて子供たちに必要な資質・能力を確実に育む観点から，小学校算数科における課題も踏まえ，中学校における学習との関係に考慮して指導に当たらなければならないという示唆である。

さて，中学校数学科では，学習指導要領の改訂に伴う移行措置により，令和元年度から第１学年の内容に「自然数を素数の積として表すこと」(中学校第３学年から移行）が追加された。これは，表面的には中学校学習指導要領（平成 20 年文部科学省告示第 28 号）(以下,「現行中学校学習指導要領」と略記）において中学校第３学年で取り扱われている内容が，中学校学習指導要領（平成 29 年文部科学省告示第 64 号）(以下「新中学校学習指導要領」と略記）への改訂に際して単に中学校第１学年に移行されただけの措置に見えてしまう。「しかし」である。「現行中学校学習指導要領」での「自然数を素因数に分解すること」との記述に対し,「新中学校学習指導要領」では「自然数を素数の積として表すこと」と記述されており，表記の仕方が異なっているのである。どちらの記述においても「自然数の素因数分解」を意味する点は共通だと思われるが，表記の仕方の差異から何かしらの意図を汲む必要があると考える。

現行中学校学習指導要領　第２章　第３節　数学
第２　各学年の目標及び内容
〔第３学年〕
３　内容の取扱い

(1)　内容の「Ａ数と式」の(2)などに関連して，自然数を素因数に分解することを取り扱うものとする。
新中学校学習指導要領　第２章　第３節　数学 第２　各学年の目標及び内容 〔第１学年〕 ３　内容の取扱い (1)　内容の「Ａ数と式」の(1)に関連して，自然数を素数の積として表すことを取り扱うものとする。

（下線部は筆者による。）

その意図は，現行中学校学習指導要領解説数学編（平成 20 年９月）（以下，「解説数学 20」と略記）と，新中学校学習指導要領解説数学編（平成 29 年 7 月）（以下，「解説数学 29」と略記）の該当する解説を比べると明らかになるだろう。

自然数の素因数分解 内容の取扱い(1)に示されているように，自然数の素因数分解を内容の「Ａ数と式」の(2)などに関連して取り扱う。これは，自然数の素因数分解が，文字を用いた式での因数分解に相当するものだからである。 小学校算数科では，自然数の性質について，偶数，奇数，約数，倍数，最大公約数,最小公倍数という観点から学習している。また，約数を調べる過程で素数にも触れている。 ここでは，１より大きい自然数が，１とその数自身以外には約数をもたない数とそうではない数とに分けられること，すなわち，素数とそうではない数との２種類に分けられることを理解する。 素数ではない数は，その約数を用いていくつかの自然数の積で表すことができる。また，それらの自然数の中に素数でないものがあれば，さらに，その約数を用いて積に表すという操作を続けていくと，最終的には素数だけの積で表すことができる。これが素因数分解であり，その表し方はただ一通りに決まる。これについては，分解の順序をいろいろに変えても，整理すると結果は同じ素数の積になることを具体的・経験的に知ることが大切である。（「解説数学 20」）
自然数を素数の積として表すこと（[内容の取扱い]（1)） 内容の取扱い(1)に示されているように，自然数を素数の積として表すことを内容の「Ａ数と式」の(1)などに関連して取り扱う。これは，自然数を素数の積として表すことによって，小学校算数科で学んできた整数の性質についての理解を深め，中学校での学習につなげることができるからである。 小学校算数科では，整数の性質について，偶数，奇数，約数，倍数，最大公約数，最小公倍数という観点から学習しているが，素数については学習していない。 ここでは，１より大きい自然数が，１とその数自身以外には約数をもたない数とそうではない数とに分けられること，すなわち，素数と素数ではない数との２種類に分けられることを理解できるようにする。 素数ではない数は，その約数を用いて幾つかの自然数の積で表すことができる。また，それらの自然数の中に素数でないものがあれば，さらに，その約数を用いて積に表すという操作を続けていくと，最終的には素数だけの積で表すことができる。これが素因数分解であり，その表し方はただ一通りに決まる。分解の順序をいろいろに変えても，整理すると結果は同じ素数の積になることを活動を通して具体的に知ることができるようにする。このように自然数を素数の積で表すことにより，算数で学習した約数，倍数などの整数の性質について捉え直すことができるようにする。 （「解説数学 29」）

（下線部は筆者による。）

「解説数学 20」によれば，「現行中学校学習指導要領」では指導のねらいが，自然数の素因数分解と，文字を用いた式での因数分解の関連付けにあると読み取れる。この点については，言い過ぎかもしれないが，自然数の素因数分解そのものだけが目的であり，考察の対象とされているように思われる。これに対して，「解説数学 29」によれば，「新中学校学習指導要領」では指導のねらいが，小学校算数科で学んできた整数の性質についての理解を深める点にあるとされている。言い換えれば，素数だけの積として表されたものを基にして，それをどのように見たり解釈したりすれば整数の性質を明らかにできるのか等，自然数の素因数分解が問題解決の手段として位置付けられていると考えられる。以上より，両者の指導のねらいに大きな差異があることは明白である。このように，「新中学校学習指導要領」の意図を十分に汲み取り，「自然数を素数の積として表すこと」を通して既習の学習内容を振り返り，それを新たな視点から再構成し，具体的な問題解決の場面で活用できるようにする等，小・中学校の間の円滑な接続を図るためにも重要な位置付けにある内容だと考えなければならないだろう。

ところで，「自然数を素数の積として表すこと」を指導するのに先立ち，本校の生徒を対象に「整数に関する学習状況調査Ａ」（平成 31 年４月 25 日　茨城大学教育学部附属中学校第１学年 144 名対象）を実施した。次に示すものは，その調査問題とその正答，正答率である。

$\boxed{1}$　８と 12 の最小公倍数を求めなさい。

【正　答】24
【正答率】92.4％（133 名）

※　本問題は，平成 29 年度全国学力・学習状況調査における小学校算数Ａ$\boxed{3}$（正答率 86.3％）と同一の問題である。なお，平成 24 年度全国学力・学習状況調査においても中学校数学Ａ$\boxed{1}$(1)（正答率 69.1％）で同一の問題が出題されている。

$\boxed{2}$　30 と 42 の最大公約数を求めなさい。

【正　答】６
【正答率】93.1％（134 名）

$\boxed{3}$　１以上 20 以下の整数のうち，素数であるものをすべて答えなさい。

【正　答】２，３，５，７，11，13，17，19
【正答率】45.8％（66 名）

※　本学年の生徒は，小学校第５学年で素数について学習している。

$\boxed{4}$　20 から 30 までの 11 個の整数を全部かけた数は，一の位から連続して何個０が続くか。答えを出すまでの途中の考え方を書いて答えなさい。

【正　答】４個（途中の考え方省略）
【正答率】27.1％（39 名）

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$の正答率より，最小公倍数や最大公約数を求めることについては全体的に良好な状況だと言えるだろう。しかしながら，$\boxed{3}$の正答率より素数についての理解が定着していない状況が浮き彫りとなった。特に，誤答例として１を素数に含めた解答が目立った。この点については，中学校第１学年で「自然数を素数の積として表すこと」を取り扱う際に再指導が必要である。また，$\boxed{4}$の望ましい（模範的な）考え方としては，20 から 30 までの 11 個の整数をそれぞれ素因数分解した際に，２と５の積の組み合わせを何組つくれるかを見いだして解答するといったものが考えられる。実際に，39 名が正答できたわけであるが，そのうち 22 名（56.4％）の生徒が前述した内容を途中の考

え方に位置付けていた。小学校算数科では自然数を素因数分解する学習が行われてはいないが，倍数や約数の学習を経過しているにもかかわらず，ある整数を合成数として捉える理解，あるいはその理解した事柄を用いて思考する経験が不足している状況は否めないだろう。このような生徒の実態を鑑みると，自然数を素因数分解による表現だけでなく，それを用いるとどのような整数の性質が見いだせるのかといった学習をするところまで踏み込んで指導計画を作成する配慮が必要である。

そこで，急激な社会の変化や，学校教育を通じて子供たちが身に付けるべき資質・能力を踏まえるとともに,「新中学校学習指導要領」における「自然数を素数の積として表すこと」の指導のねらいや，本校生徒の実態を受けて，現状を改善・充実する取組が必要だと考え，本主題を設定した。

参考　素因数分解の一意性の証明

２以上の整数の素因数分解は，積の順序を除いて一通りに表せる。

（証明）

整数 m が，次の２通りに素因数分解できたとする。

$$m = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_k \quad \cdots\cdots\cdots①$$

$$m = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \cdots \cdot q_l \quad \cdots\cdots\cdots②$$

①と②から

$$m = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_k = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \cdots \cdot q_l \quad \cdots\cdots\cdots③$$

が成り立つ。

いま，③の右辺には q_1 がかけられており，右辺は q_1 の倍数である。

したがって，③の左辺も q_1 の倍数ということになる。

$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_k$ は q_1 の倍数なので，素数 p_1，p_2，p_3，…，p_k のうちのどれかが q_1 であることになる。

仮に $p_i = q_1$ だとすると，③は,

$$m = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_i \cdots\ p_k = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \cdots \cdot q_l$$

この両辺を p_i （$= q_1$）でわると

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_i \cdots\ p_k = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \cdots \cdot q_l$$

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_{i-1} \cdot p_{i+1} \cdot \cdots \cdot p_k = q_2 \cdot q_3 \cdot \cdots \cdot q_l$$

このように，両辺にある同じ素数で繰り返しわっていくと，両辺にかけられている素数の個数が同じで，①と②はかけられている素数の順序だけが異なっていることがわかる。

※　例えば,「解説数学 29」では，素因数分解の一意性の取扱いを「これが素因数分解であり，その表し方はただ一通りに決まる。分解の順序をいろいろに変えても，整理すると結果は同じ素数の積になることを活動を通して具体的に知ることができるようにする。」と示している。指導者は，厳密にはここに示した証明が必要であることを押さえておく必要がある。

2　研究のねらい

中学校第１学年「自然数を素数の積として表すこと」の学習において，目的をもって自然数の素因数分解を用い，数の性質を見いだし考察する力を養う授業づくりについて究明する。

3　研究の仮説

中学校第１学年「自然数を素数の積として表すこと」の学習において，目的をもって自然数の素因数分解を用いることができる授業づくりをすれば，生徒は自然数の素因数分解の有用性について学びを深め，数の性質を見いだし考察する力を養うことにつなげられるだろう。

4　仮説検証の方法

⑴　「生徒は自然数の素因数分解の有用性について学びを深められたか」について

下記５の⑵に示した手立てである「①　自然数の素因数分解を用いて，整数の性質等を見いだしたり，問題解決したりして学習するための指導計画の設計」，「②　導いた結果やその価値を振り返って自覚化する場面の設定」を通して，「生徒は自然数の素因数分解の有用性について学びを深められたか」について検証する。その際，次のア～ウの視点に分けて検証し，エで総括する。

ア　基礎となる知識・技能の習得状況について

イ　導いた結果やその価値を振り返って自覚化する場面の設定（練習問題に取り組む場の設定）について

ウ　「調査Ａ」，「調査Ｂ」の共通問題における生徒の変容について

エ　生徒は自然数の素因数分解の有用性について学びを深められたか

⑵　「数の性質を見いだし考察する力を養うことにつながったか」について

自然数の素因数分解とのつながりを意識した学びになっていたか，並びに下記５の⑵に示した手立てである「③　考えの伝達や討議などの交流をする場の設定」の効果を考察し，「数の性質を見いだし考察する力を養うことにつながったか」について検証する。その際，次のア，イの視点に分けて検証し，ウで総括する。

ア　自然数の素因数分解とのつながりを意識した学びになっていたか

イ　考えの伝達や討議等の交流をする場の設定の効果について

ウ　数の性質を見いだし考察する力を養うことにつながったか

5　研究の内容

⑴　基本的な考え

①　数の性質を見いだし考察する力とは

まず，「数の性質」について考える。例えば，900 がどのような自然数の２乗なのかを見いだし考察する場合，900 を素因数分解して，次のように考えて式をつくることで，30^2になることを説明できる。

$$
\begin{aligned}
900 &= 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \\
&= (2 \times 3 \times 5) \times (2 \times 3 \times 5) \\
&= (2 \times 3 \times 5)^2 \\
&= 30^2
\end{aligned}
$$

この例より，ある自然数の２乗になる数は，素因数の積で表されている同じものが２つかけ合わされているという性質があると説明できる。「数の性質」というと単に「$900=30^2$だから，900 は平方数だ」程度の事柄を述べるのにとどめてしまいがちだが，計算だけでなく，上で示した例や説明のようにその考え方までを含んで「数の性質」と考えることにしたい。

さて，「数の性質を見いだし考察する力」を養うことは，「新中学校学習指導要領」において育成を目指す資質・能力の柱の中の「思考力，判断力，表現力等」に関わるものである。なぜ

ならば，思考力，判断力，表現力等は，問題を見いだしたり，知識及び技能を活用して問題を解決したり，よりよい答えや新たな知識を得たりする際に必要な力だからである。このような力を養う上で，生徒自身が次の数学の学習をつくるために「既習の数学とのつながりを探り，つくる」という行為が不可欠だと考える。既習の数学は，数学的な事実，アルゴリズムや手続きなどを見いだす際にその支えとして重要な働きをするものである。これを汎用的な知識・技能（手がかり）としてつながりを探り，新たな知識を得られるようにするのである。これに関連して，永田氏は「既習の数学と結び付けること」を次のように定義している。

既習の数学と結び付けることは，<u>これから明らかにしようとする数や図形の性質などを基点として，その解明の足がかりとなる既習の数学を探ること</u>だといえます。1）　（下線筆者）

以上より,「数の性質を見いだし考察する力」とは,「既習の数の性質とのつながりを意識し，新たな知識を得ようとする行為」と捉えることにする。

②　目的をもって自然数の素因数分解を用いることができる授業づくりとは

「現行中学校学習指導要領」における自然数の素因数分解の指導のねらいが，自然数の素因数分解と，文字を用いた式での因数分解の関連付けにあることは，上記１で確認したとおりである。確かに，数と式とは，密接に関連しているので，そのような取扱いを否定はできないと考える。しかし，そもそも自然数の素因数分解がどのような場面でその威力を発揮するかを考えた場合，そのようなねらいが本来的なのかどうかが明らかになるだろう。例えば，24 のすべての約数を求める際に素因数分解$２^３×３$を用いることを考える。１とその数自身 24 以外の約数は，素因数が一つの場合は２と３がある，素因数が二つの場合は２×２と２×３がある，素因数が三つの場合は２×２×２と２×２×３があるというふうに，素因数の構成を考えて組織的に約数を求められる。この事例においてすべての約数を求めるまでの一連の過程を振り返ると，素因数の積に表し，その自然数がどのような素因数で構成されているのかを見いだしてその自然数の特徴をつかみ，目的のものを求めるという具合に，自然数の素因数分解が目的のものをつかむための手段として機能していると考えられる。このような事例を鑑みれば，自然数の素因数分解を，自然数の特徴をつかむ，問題解決をする等の目的を果たすための手段として位置付けておく方が自然である。したがって，自然数の素因数分解の指導のねらいは，それを手段として整数の性質等を捉えたり考察したりすることにあると考える。これに関連して，杉山氏は次のように述べている。

素因数分解は数の世界の話，因数分解は式の世界の話なのですが，似ているから，中学３年に置かれていますが，本当は，素因数分解は数の話ですから，数の話として早く学習しておくべきです。<u>因数分解があるから，素因数分解があるのではありませんね。整数の世界で，整数を素数の積に表して，整数についての話を進めるためにあるものです。</u>2）　（下線筆者）

なお，中学校学習指導要領に「整数の性質」が言及されたのは，昭和 52 年以来である。かつては，整数の性質や最大公約数・最小公倍数について丁寧に学べるように配慮されていた。その当時の取扱いも十分に参考にして，具体の指導計画を設計できるように意を用いたい。

中学校学習指導要領　昭和 52 年７月　文部省
第２章　各教科　　第３節　数学
　第２　各学年の目標及び内容
　　　〔第１学年〕

１　目　標

（１）　整数の性質についての理解を深めるとともに，数を正の数と負の数にまで拡張し，数の概念についての理解を深める。

２　内　容

Ａ　数と式

(1)　整数の性質についての理解を深める。

ア　整数を素数の積として表すこと。

イ　約数及び倍数の性質 [3)]　（下線筆者）

以上より，「目的をもって自然数の素因数分解を用いることができる授業づくり」とは，「生徒が自然数の素因数分解を手段とし，整数の性質等を見いだしたり，問題解決したりして学習するための指導計画の設計」と考えることにする。ただし，このような指導計画を設計するからといって，自然数の素因数分解の技能習得や，その一意性についての理解を疎かにするものではないことを付言しておく。これらの技能や理解が伴って，整数の性質等を見いだしたり，問題解決したりする学びが充実するのである。

③　自然数の素因数分解の有用性について学びを深めるとは

自然数の素因数分解の有用性について学べる素材として，２乗になっている整数の仕組みを考察すること，約数と倍数の関係をつかむこと，最大公約数や最小公倍数を求めること等が挙げられる。これらの素材は，いずれも自然数の素因数分解によって仕組みや関係，結果等を見いだせるものである。このような学習をする際，問題解決の過程を振り返り，自然数の素因数分解が「役立つ」「便利だ」等と有用性を味わう経験が学びの質に変化をもたらすと考える。すなわち，習得した知識や技能を用いて目的のものを求めたり，問題の場面や状況に応じて適用したりすることを通して，知識や技能の有用性を実感したり，味わったりすることができるのである。そして，このような経験の積み重ねによって，汎用的な知識・技能となり，新たな問題の場面や状況においても，知識や技能を相互に関連付けたり組み合わせたりする等して自在に活用できるようになるのである。つまり，これが学びを深めた状態だと考える。これに関連して，齋藤氏は次のように述べている。

算数・数学における深い学びとは，学んでいる数学の内容や意味，学習要素の前後の関連，全体の構造的・体系的な関係等を思考・把握し，数学の本質（構造や性質等）を見出し理解する学び，及び習得した知識を活用して，新たな問題や課題の解決に適する知や価値を想像する学びです。[4)]　（下線筆者）

以上より，「自然数の素因数分解の有用性について学びを深める」とは，「自然数の素因数分解を用い，問題解決する経験の積み重ねを通して，問題の状況や場面に応じて活用できる汎用的な知識・技能の状態になる」ことだと捉えることにする。

⑵　主題に迫るために

①　自然数の素因数分解を用いて，整数の性質等を見いだしたり，問題解決したりして学習するための指導計画の設計

自然数の素因数分解をするのは，単に自然数を素数の積に表すことが目的ではなく，整数の性質等を見いだしたり，問題解決したりするという目的や動機があるからである。指導計画の設計に当たっては，この点に十分に留意し，内容を吟味しなければならないと考える。また，

前述した「既習の数学とのつながりを探り，つくる」という行為が生徒自身によって遂行され，経験できるように学習過程についても配慮が必要である。これに関連し，永田氏は次のような示唆を与えている。

「数や図形の性質などを見いだす活動」をつくるには，現在の学習を既習の数学と結びつけることで数や図形の性質などを見いだすことができるのだということを，子どもが意識できるように工夫する必要があります。その経験が，次に数や図形の性質などを見いだそうとする場面に直面したとき，つながりを探そうという発想を生み出すことにつながるのです。5)

（下線筆者）

具体的には，１単位時間の授業の中，あるいは，単元内の内容や時間のまとまりにおいて，基礎となる知識・技能の習得を図った上で，それを用いて整数の性質等を見いだしたり，問題解決したりする活動を組み合わせて授業を組み立てていく。このような指導計画の下，学習の経験を積み重ねることで，生徒自身によって「自然数の素因数分解を用いて，目的のものをどのように見いだすか」という意識ができるようになると考える。

② 導いた結果やその価値を振り返って自覚化する場面の設定

自然数の素因数分解を用いて問題解決する意義や，そのよさを実感できるようにするために，導いた結果やその価値を振り返って自覚化する場面を設定する。そのような場面を１単位時間の授業の終末に練習問題に取り組む場を設定することで，具現化したいと考える。

授業の終末に練習問題に取り組むことは，１単位時間の学習の定着を図ったり，次時の学習への意欲付けをしたりする効果がある。さらに，その他にもこの時間で獲得した知識・技能や概念，定理などを確認したり，それらの新たな問題の状況や場面に応じた用い方を習得したりして，自己の学びの過程や状況を振り返り，学びの質を一層高める効果があると考える。このような考えに基づき，練習問題が単なる定着のための練習にならないようにその難易度や問い方を工夫して，自然数の素因数分解を用いて問題解決する意義や，そのよさを実感することにつなげたいと考える。

③ 考えの伝達や討議等の交流をする場の設定

授業において，他者との交流は，自分の考えなどを広げたり深めたりするために大切にされなければならないと考える。それによって，事象を数学的な表現を用いて論理的に説明したり，よりよい考えや事柄の本質について話し合い，よりよい考えに高めたり事柄の本質を明らかにしたりする等の学びを実現できるのである。これに関連し，金本氏は次のように述べている。

いろいろな考えを知ることにより自らの考えの位置が明確になり，また，他の考えと関連づけることにより自らの考えが豊かになるのである。思考の広がりが得られるのである。6)

以上のような考えを踏まえ，考えの伝達や討議などの交流をする場（小集団や全体における話合い活動の場）の設定をする。これによって，知識や技能を相互に関連付けたり組み合わせたりするときに，個々の着想を豊かにし，学びを深めることに作用するものだと考える。

６　実践研究

⑴　「自然数を素数の積として表すこと」に関する指導内容の系統（小学校から高等学校）

校種・学年　等	指導内容　等
小学校・第５学年	１　整数の性質 偶数，奇数／約数，倍数
中学校・第１学年	Ａ　数と式 ［内容の取扱い］　自然数を素数の積として表すこと
中学校・第３学年	Ａ　数と式 平方根 式の展開と因数分解
高等学校	数学Ⅱ (1)　いろいろな式

⑵　単元の目標

○　１より大きい自然数には，素数と素数でない数があり，素数でない数は一通りに素因数分解できることを理解しているとともに，自然数の素因数分解の技能を身に付けている。
（知識・技能）

○　自然数を素因数分解した結果をもとに整数の性質を捉え直すとともに，自然数の素因数分解を用いて具体の問題解決をすることができる。（思考・判断・表現）

○　自然数を素因数分解することのよさを見いだしたり，自然数の素因数分解を用いて整数の性質を考察したりして，理解を深めようとしている。（主体的に学習に取り組む態度）

⑶　指導と評価の計画（３時間扱い）　（５の⑵①に関連）

時間：次	時間：時	学習内容・活動	評価計画：知・技	評価計画：思・判・表	評価計画：主体的	㊞評価規準【評価方法】○指導上の留意点	◎規準を満たすための手立て
第１次	１	素因数分解	○			㊞　素数の意味について理解するとともに，自然数を素因数分解することができ，それを用いて数の性質を見いだしている。【練習問題・発言】	◎　平方数を取り上げ，自然数の素因数分解を基にして，その仕組みを見いだしたり，ある自然数がどんな自然数の２乗になっているかを求めたりする。
	２	素因数分解と公約数，公倍数	○			㊞　自然数の素因数分解を用いて，２つの自然数の最大公約数と最小公倍数を求める方法を理解し，求めることができている。【練習問題】	◎　２つの自然数の素因数分解を基にして，最大公約数，最小公倍数の求め方を見いだせるようにする。
	３	素因数分解の利用		○	○		

	本 時	1　問題に取り組み，用語を理解する。 (1)　既習事項の確認をする。 次の分数を小数で表しましょう。 $\frac{2}{10}$　$\frac{5}{100}$　$\frac{125}{1000}$	○　分数と小数の関係を確認するとともに，下記４の考察の場面に接続できるようにしておく。
		(2)　用語を理解する。 有限小数・・・終わりのある小数 無限小数・・・終わりがなくどこまでも続く小数	○　わり進みの計算をして，割り切れるものと割り切れないものがあることを確認し，有限小数と無限小数の定義をする。
		(3)　問題に取り組む。 次の単位分数を，有限小数になるものと，無限小数になるものに仲間分けしましょう。 $\frac{1}{2}$　$\frac{1}{3}$　$\frac{1}{4}$　$\frac{1}{5}$　$\frac{1}{6}$　$\frac{1}{7}$　$\frac{1}{8}$　$\frac{1}{9}$　$\frac{1}{10}$ ＜有限小数＞ $\frac{1}{2}$　$\frac{1}{4}$　$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{8}$　$\frac{1}{10}$ ＜無限小数＞ $\frac{1}{3}$　$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$　$\frac{1}{9}$	○　分数を小数で表す際につまずく生徒がいると予想されるので，その計算方法を全体で確認する。 ○　本時で取り扱う無限小数は，有理数を小数で表したものだから，本来であれば循環小数を定義する必要がある。しかし，本時は循環小数を学習する必要感がない段階なので，有限小数と無限小数の定義をするだけにとどめ，生徒の思考に負担をかけないように配慮する。 ○　$\frac{1}{n}$ の形（n は２以上の自然数）で表せる分数を単位分数ということを確認する。
		2　本時の課題を把握する。 分母がどのような数ならば，有限小数になるのだろうか。	○　分母の数が有限小数，無限小数の分類にかかわることを見通し，本時の課題につなげられるようにする。 ○　結果についての見通しをもつために，他の単位分数についても調べて共通点を見いだす必要感をもてるようにしたい。
		3　結果についての見通しをもつ。（５⑵③に関連） (1)　小集団で追究する。	○　必要に応じて計算機を利用してよいこととする。 ○　各小集団の話合いが停滞している場合には，追究の途中であっても他の小集団で出された意見を紹介したり，整数の性質を考察するための手段（道具）である素因数分解について振り返ったりして，結果についての見通しをもてるようにするための支援をできるようにする。

予想される生徒の反応

・分母が２，４，５，８，10，16，20，25，32，40，50，64，80，100，…のときに，有限小数になっている。これらの数に何か共通点はあるのだろうか。
・分母を素因数分解したら，何か分かるかもしれない。
・分母を素因数分解してみると，素因数に２と５がある場合に有限小数になっている？　でも，分母がどんな場合かを説明するためには何と言えばよいか…。
・分母を素因数分解してみて，結果についての見通しはもてたけれど，どのような理由があるのだろう？

(2) 全体で，結果についての見通しと，その理由を説明するための方法についての見通しをもつ。

見通し

（結果についての見通し）
分母を素因数分解し，２だけ，５だけ，２と５だけの積で表されるとき，有限小数で表せそうだ。
（方法についての見通し）
有限小数で表せる単位分数と，有限小数を分数で表したものを比べると理由が明らかにできそうだ。

４　有限小数で表せる単位分数について，理由を考察する。

(1) 全体で考え方を共有する。（５(2)③に関連）
・　有限小数で表される単位分数と，無限小数で表される単位分数を比較して，理由を話し合う。

＜有限小数で表される単位分数＞

$$\frac{1}{5}=\frac{1\times 2}{5\times 2}=\frac{2}{10}=0.2$$

$$\frac{1}{20}=\frac{1}{2^2\times 5}=\frac{1\times 5}{2^2\times 5^2}=\frac{5}{100}=0.05$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}=\frac{1\times 5^3}{2^3\times 5^3}=\frac{125}{1000}=0.125$$

★　単位分数で分母が２だけ，５だけ，２と５だけの素数の積で表される場合，**分母を 10 の累乗の形で表せるので**有限小数となる。

＜無限小数で表される単位分数＞

○　小集団で追究したことをもとにして，考察の方向性を定める。
㊞　小集団で追究し，どのような結果になりそうか見通しをもとうとしている。【グループ内対話】
◎　（方法についての見通し）は，例えば，次のような関係から理由を考察するように促す。

$$\frac{1}{2}=0.5=\frac{5}{10}$$

$$\frac{1}{8}=0.125=\frac{125}{1000}$$

○　分母が 10 の累乗である単位分数は，有限小数であることを踏まえておく。

○　有限小数になるための条件は，「分母が 10 の累乗のとき」ではなく，「分母が 10 の累乗で表せるとき」であることを踏まえ，全体での話合いを進行できるように配慮する。

○　上記１の(1)で確認した分数と小数の関係を手がかりとして，単位分数と分母が 10 の累乗で表されている分数とのつながりを見いだし，単位分数で分母が２だけ，５だけ，２と５だけの素数の積で表されるときに有限小数になることの理由を考察できるようにする。

○　無限小数で表される単位分数も取り上げ，有限小数で表される単位分数と比較することで，後者についての理解を深める一助としたい。
（A を強調するための non A の提示）

○　本時の課題に戻り，「単位分数の分母がどのような数ならば」に視点を当てて整理するように促す。

		$\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times 3}=\cdots$ $\frac{1}{9}=\frac{1}{3^{2}}=\cdots$ $\frac{1}{15}=\frac{1}{3\times 5}=\cdots$ 単位分数で分母が２と５以外の積で表されていると，分母を 10 の累乗の形で表せない。 (2) 個人で明らかになったことを整理する。 **分母の数が２だけ，５だけ，２と５だけの積で表される**ならば，有限小数になる。 ５　練習問題に取り組み，本時の学習を振り返る。 （５⑵①②に関連） 次の単位分数を，有限小数として表せるか判定しよう。 $\frac{1}{1280}$　$\frac{1}{1764}$	㊙　単位分数を有限小数で表せるのは，分母が２だけ，５だけ，２と５だけの積で表される場合であることが理解できている。【ノート】 ◎　分母が２だけ，５だけ，２と５だけの積以外で表されている単位分数と比較して，違いを明確にする。 ○　問題を提示する際,本時の学習を通して明らかにした事実に基づいて判断してよいことを確認する。 ○　練習問題に取り組み,本時の学習を振り返ることができるようにする。その際，自然数の素因数分解の有用性を実感できるようにしたい。 ○　単位分数について有限小数かどうかを判定できれば,その他の分数についても有限小数かどうかを判定できる発展的な視点をもてるようにしたい。

【本時の準備物】　電卓　ワークシート

⑷　本時（第３時）の事前に育てておきたい力

事前に身に付けておきたい知識・技能
□素数，素因数，自然数の素因数分解の意味を理解している。 □十進位取り記数法の仕組みを理解している。 □電卓を使って四則を計算できる。 □筆算で除法を行い，商を導くことができる。 □分数と小数の関係を理解している。 □分母が 10 の累乗である分数と有限小数の関係を理解している。 □$a \div b = \frac{a}{b}$ （a，b は整数で，b は０でない）を理解している。 □同じ大きさを表す分数を幾通りの表し方で表現できる。 □自然数の素因数分解ができる。
事前に身に付けておきたい思考・判断・表現
□諸事象から共通点や規則性を見いだすことができる。 □十進位取り記数法の仕組みを基にして，数の構成を説明できる。 □自然数の素因数分解を基にして，数の仕組みを説明できる。
事前に育てたい主体的に学習に取り組む態度
□自然数の素因数分解を用いて問題を解決しようとする。 □既習事項を基にして，新たな事実を見いだそうとする。

⑸　本時の事前に取り扱う練習問題（５⑵②に関連）

第１時

$\boxed{1}$　次の数を素因数分解しましょう。　＊意図<知識・技能の確認>

①　20　②　98　③　189

$\boxed{2}$　1764 はどんな自然数の２乗か求めましょう。　＊意図<知識・技能の確認>

$\boxed{3}$　72 にできるだけ小さい自然数をかけて，ある整数の２乗になるようにする。どんな数をかければよいか求めましょう。　＊意図<知識・技能の活用>

$\boxed{4}$　120 をできるだけ小さい自然数でわって，ある整数の２乗になるようにする。どんな数でわればよいか求めましょう。　＊意図<知識・技能の活用>

第２時

$\boxed{1}$　36 と 90 の最大公約数，最小公倍数をそれぞれ求めましょう。＊意図<知識・技能の確認>

$\boxed{2}$　ある自然数で 57 をわると３余り，また，79 をわると７余る。<u>このような自然数をすべて求めましょう。</u>　＊意図<知識・技能の活用>

【補足】　下線部＿＿＿は，「このような自然数のうち最大のものを求めましょう。」と問うこともできるが，条件を満たさない不適なものを見いだし，より学びの質を高めるために本設問のようにした。

$\boxed{3}$　２数の最大公約数が 11 で，最小公倍数が 132 である２数をすべて求めましょう。　＊意図<知識・技能の活用>

【補足】　該当する２数の候補は全部で３組あるが，条件を満たさない不適なものを見いだし，より学びの質を高めるために本設問のようにした。

⑹　授業の分析と考察

上記４で示した仮説検証の方法にしたがって，授業の分析及び考察を進める。その際，抽出学級を令和元年度第１学年４組とし，次に示す調査や，上記６の⑶の本時（第３時）における生徒による考察を手がかりとする。

- 「整数に関する学習状況調査Ａ」（以下，「調査Ａ」と略記）
  （平成 31 年４月 25 日　茨城大学教育学部附属中学校　第１学年４組　36 名対象）
- 上記６の⑶の本時（第３時）における生徒による考察（以下，「生徒の考察」と略記）
  （令和元年６月 28 日　茨城大学教育学部附属中学校　第１学年４組　36 名対象）
- 「整数に関する学習状況調査Ｂ」（以下，「調査Ｂ」と略記）
  （令和元年７月 23 日　茨城大学教育学部附属中学校　第１学年４組　35 名対象）
  ※調査当日，１名の欠席者がいたため，調査対象が 35 名となっている。

①　生徒は自然数の素因数分解の有用性について学びを深められたか

ここでは，上記５の⑵に示した手立てである「①　自然数の素因数分解を用いて，整数の性質等を見いだしたり，問題解決したりして学習するための指導計画の設計」，「②　導いた結果やその価値を振り返って自覚化する場面の設定」を通して，「生徒は自然数の素因数分解の有用性について学びを深められたか」について，検証を試みる。

ア　基礎となる知識・技能の習得状況について

「調査Ｂ」において,「自然数を素数の積として表すこと」の学習を終えた後の基礎となる知識・技能の習得状況をみるために，次のような調査問題を設けた。次に示すものは，その問題と正答である。

$\boxed{1}$　10 以下の素数をすべて書きなさい。 【正　答】２，３，５，７ $\boxed{2}$　次の数を素因数分解しなさい。 ①　75　　②　126 【正　答】3×5^2　　【正　答】$2\times3^2\times7$ $\boxed{3}$　60 と 84 の最大公約数と最小公倍数を求めなさい。 最大公約数　【正　答】12 最小公倍数　【正　答】420

表１は，上記の調査問題に対する解答状況を表したものである。

$\boxed{1}$については，概ね良好な状況だと考える。４月の段階で実施した上記１の「調査Ａ」$\boxed{3}$に類似する問題に当たるが，そのときの第１学年４組の正答率は 63.9％（23 名が正答）であった。設問が異なるので直接的な比較には配慮を要するが，学級全体としての状況は改善に向かっていると考えてよいだろう。ただし，誤答の状況をみると，素数に１を含めてしまう解答が顕著であるため折に触れて繰り返し再指導していく必要があると考える。

$\boxed{2}$については，①，②ともに正答率が９割を超えている状況から，自然数を素因数分解することの基礎的技能については良好な状況だと判断してよいだろう。

$\boxed{3}$については，２数の最大公約数，最小公倍数を求める基礎的技能が不足している生徒の手当てが必要だと考える。今後，再指導するのはもちろんのこと，上記⑸に示した第２時の練習問題に類題をあと少し付け足し，経験を積めるようにすべきだったと振り返る。今後の授業改善の手立てとしていきたい。

以上より，繰り返し再指導して補ったり，回復したりすることができるように手立てを講じる必要がある状況もあるが,「自然数を素数の積として表すこと」の学習を通して，基礎となる知識・技能の習得状況は概ね良好だと考える。

表１　基礎となる知識・技能の習得状況

	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$　①	②	$\boxed{3}$　最大公約数	最小公倍数
正答	82.9％ (29 名)	97.1％ (34 名)	91.4％ (32 名)	77.1％ (27 名)	77.1％ (27 名)
誤答	17.1％ （６名）	2.9％ （１名）	8.6％ （３名）	22.9％ （８名）	22.9％ （８名）

イ　導いた結果やその価値を振り返って自覚化する場面の設定(練習問題に取り組む場の設定）について

図１は，自然数の素因数分解の学習をした際に，上記⑸に示した第１時の練習問題$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$に取り組む場を設けた手立てについて，生徒の意識（考え）をたずねた結果をグラフに表したものである。(「調査Ｂ」の回答に基づく。)

①の設問に対する結果は,「そう思う」,「どちらかといえばそう思う」を合わせると 97.1％，②の設問に対する結果は，「そう思う」，「どちらかといえばそう思う」を合わせると 85.7％

であった状況から，練習問題に取り組む場の設定について，全体的に好意的に受け止められていると判断してよいだろう。この結果は，多くの生徒が自然数を素因数分解することの知識・技能に留まらず，新たな問題の状況や場面に応じた用い方を習得することによって，自然数の素因数分解を用いて問題解決する意義や，そのよさを実感し，自己の学びの質を一層高めることにつながるという意識を抱いている証左だと考える。

また，③の設問に対する結果は，「どちらかといえばそう思わない」，「そう思わない」を合わせると 34.3％を占めていた。この状況は，経験がない状態では類似の問題場面で思考が及ばないのではないかという生徒の不安を表していると推察する。一つの学級で３割強の生徒がそのような思いを抱いているとすれば，生徒に問題の状況や場面に応じて活用できる汎用的な知識・技能を育む上で，練習問題に取り組む場の設定というのは欠かせない手立てだと言えよう。

以上より，練習問題に取り組む場は，単にその時間の知識・技能の習熟をするためだけの機能としてはたらくものではないと思われる。自然数の素因数分解を用いて問題解決する意義や，そのよさを実感でき，導いた結果やその価値を振り返って自覚化する場面として有効にはたらいていたと考える。ただし，練習問題が単なる定着のための練習にならないようにその難易度や問い方を工夫したり，調整したりする配慮が必要である。

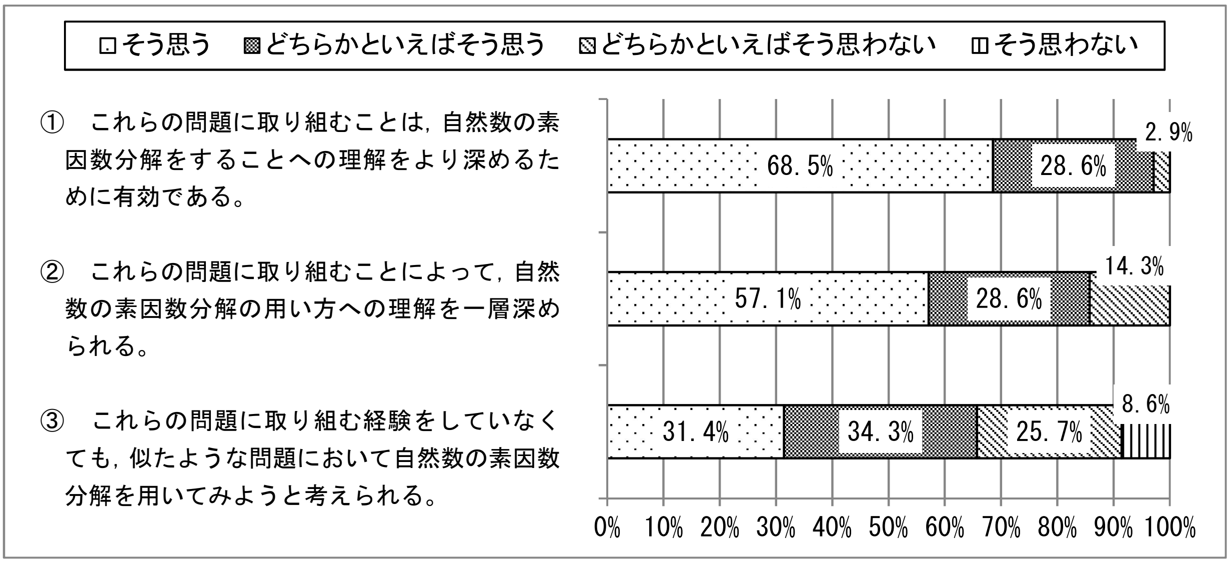

図１　練習問題を設けた手立てに対する生徒の意識

ウ　「調査Ａ」，「調査Ｂ」の共通問題における生徒の変容について

「調査Ａ」，「調査Ｂ」において，共通問題を設けた。共通問題を設けた趣旨は，「自然数を素数の積として表すこと」の学習を経過していない段階で実施した「調査Ａ」と，その学習を経過してから実施した「調査Ｂ」における生徒の解答を導く過程の状況を比較し，その変容を捉えるところにある。具体的には，「自然数を素数の積として表すこと」の学習を経過してから，自然数を素因数分解したり，ある整数を合成数と捉え，目的に応じて積の形に分解したりする知識・技能を活用して，解答を導く思考を，どの程度の生徒がするのかをみようと考えた。（この事例として，「調査Ｂ」における生徒の実際の解答を**図２**に示しておく。）

「調査Ａ」，「調査Ｂ」の共通問題

20 から 30 までの 11 個の整数を全部かけた数は，一の位から連続して何個０が続くか。答えを出すまでの途中の考え方を書いて答えなさい。

【正　答】４個

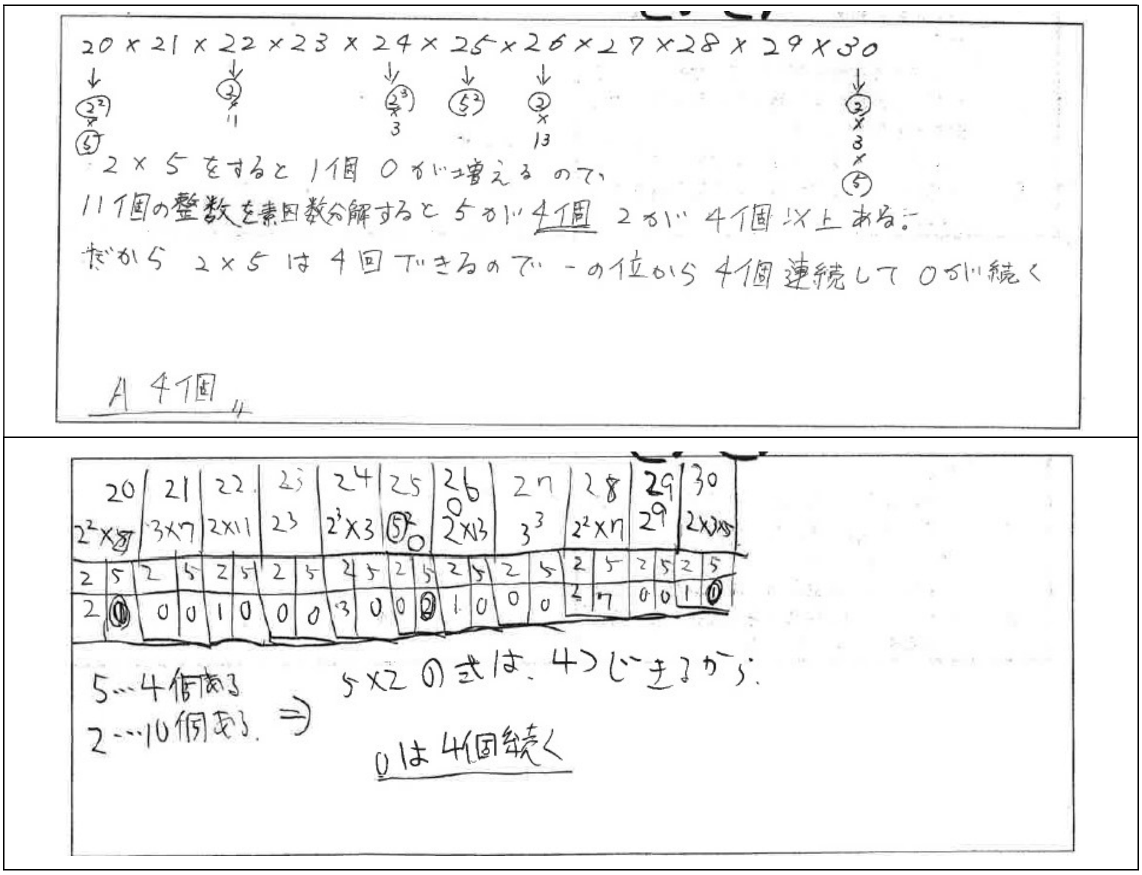

図２　「調査Ｂ」における生徒の実際の解答

表２は,「調査Ａ」,「調査Ｂ」の共通問題に対する解答状況を表したものである。また,**表３**,**表４**は，それぞれ「調査Ａ」,「調査Ｂ」における共通問題に対する正答，誤答の状況と，自然数を素因数分解する等の知識･技能を活用したか，していないかの状況をクロス集計し，その結果を表したものである。

表２からは，「自然数を素数の積として表すこと」の学習を経過してからの正答の割合が32.0％増加している状況が明らかになった。この事実から,「自然数を素数の積として表すこと」の学習によって，自然数を素因数分解する等の知識・技能をもてたことにより，それを駆使して思考し，解答を導ける生徒が多くなったと見取れるのではないかと思われる。この見取りの裏付けとして，**表３**，**表４**におけるクロス集計の結果がそれを強く物語っている。「調査Ａ」の段階では，正答，誤答にかかわらず，自然数を素因数分解する等の知識・技能を活用した生徒の割合が学級の 25.0％であった。この状況が,「調査Ｂ」の段階では大きく変容し，自然数を素因数分解する等の知識・技能を活用した生徒の割合が学級の 68.6％に上昇した。この事実は，先に述べた見取りが妥当である証左だと考える。

表２　「調査Ａ」,「調査Ｂ」の共通問題に対する解答状況

	「調査Ａ」　４月実施	「調査Ｂ」　７月実施
正答	22.3％ （８名）	54.3％ （19 名）
誤答	77.7％ （28 名）	45.7％ （16 名）

※誤答には，無答も含む。

表３　「調査Ａ」における共通問題に対する解答状況のクロス集計

	自然数を素因数分解する等の知識・技能を活用した	自然数を素因数分解する等の知識・技能を活用していない	合計
正答	16.7% （６名）	5.6% （２名）	22.3% （８名）
誤答	8.3% （３名）	69.4% (25 名）	77.7% (28 名）
合計	25.0% （９名）	75.0% (27 名）	100.0% (36 名）

表４　「調査Ｂ」における共通問題に対する解答状況のクロス集計

	自然数を素因数分解する等の知識・技能を活用した	自然数を素因数分解する等の知識・技能を活用していない	合計
正答	54.3% (19 名）	0.0% （０名）	54.3% (19 名）
誤答	14.3% （５名）	31.4% (11 名）	45.7% (16 名）
合計	68.6% (24 名）	31.4% (11 名）	100.0% (35 名）

エ　生徒は自然数の素因数分解の有用性について学びを深められたか

上記ウでは具体の問題に対する解答の過程を手がかりとして,「自然数を素数の積として表すこと」の学習を経過した後の生徒の変容を捉えてきた。自然数の素因数分解を用い，問題解決する経験の積み重ねを通して，その有用性を生徒自身が認めているからこそ，自然数を素因数分解する等の知識・技能を活用しようとする姿が表出されたのだと考える。その背景には，上記５の⑵に示した手立てである「②　導いた結果やその価値を振り返って自覚化する場面の設定」が有効に機能していたことがあると考える。この有効性については，上記イで前述したとおりである。生徒にとって授業における学びの経験（上記アに示したような基礎となる知識・技能も含む。）が支えとなり，自然数の素因数分解を問題の状況や場面に応じて活用できる汎用的な知識・技能の状態になりつつあるのである。

以上より，手立てとして掲げた「①　自然数の素因数分解を用いて，整数の性質等を見いだしたり，問題解決したりして学習するための指導計画の設計」が有効にはたらき，生徒は自然数の素因数分解の有用性について学びを深められたと考える。ただし,「調査Ｂ」の段階においても，自然数を素因数分解する等の知識・技能を活用できず，解答が導けなかった生徒の割合が 31.4%であった実態にも目を向け，手立てを講じていかなければならない点を踏まえておく必要がある。

②　数の性質を見いだし考察する力を養うことにつながったか

ここでは，自然数の素因数分解とのつながりを意識した学びになっていたか，並びに上記５の⑵に示した手立てである「③　考えの伝達や討議などの交流をする場の設定」の効果を考察し,「数の性質を見いだし考察する力を養うことにつながったか」について検証を試みる。

ア　自然数の素因数分解とのつながりを意識した学びになっていたか

図３は，自然数の素因数分解の学習をした上で，上記(5)に示した第１時の練習問題$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$に取り組んだ際の，自然数の素因数分解とのつながりに対する意識について，生徒にたずねた結果をグラフに表したものである。(「調査Ｂ」の回答に基づく。)

①の設問に対する結果は，「そう思う」，「どちらかといえばそう思う」を合わせると 94.3% を占めていた。この結果は，練習問題を解決する前提として，自然数の素因数分解についての知識・技能をもち合せていなければならないと生徒自身が認識している表れだと考える。言い換えれば，発展的な事柄を考える際には，基礎的・基本的な知識・技能を習得しておくことが重要だと多くの生徒が考えている状況だと言えよう。

②の設問に対する結果は，「そう思う」，「どちらかといえばそう思う」を合わせると 85.7% であった。練習問題$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$には，「自然数の素因数分解を用いて，…」という指示はないが，その時間で学習した知識・技能を関連付けて問題を解決しようという意識をもてている状況が見取れる。

③の設問に対する結果は，「そう思う」，「どちらかといえばそう思う」を合わせると 91.4% であった。練習問題$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$のような問題の解決を通して，自然数の素因数分解の用い方を学び，それが問題の解決のための新たな方法知として追加される。このような学びや経験を伴うことで，自然数の素因数分解という知識・技能に対する理解がより一層深まると，多くの生徒が考えているのではないかと推察する。

なお，上記①のイの補足になるが，ここで述べた生徒の意識についての結果からも，練習問題に取り組む場が，導いた結果やその価値を振り返って自覚化する場面として機能していると判断できる。すなわち，練習問題に取り組む場の設定が，自然数の素因数分解とのつながりに対する意識を誘発する役割を果たしているのである。したがって，改めてここに，練習問題に取り組む場の設定の手立てとしての有効性を認めたい。

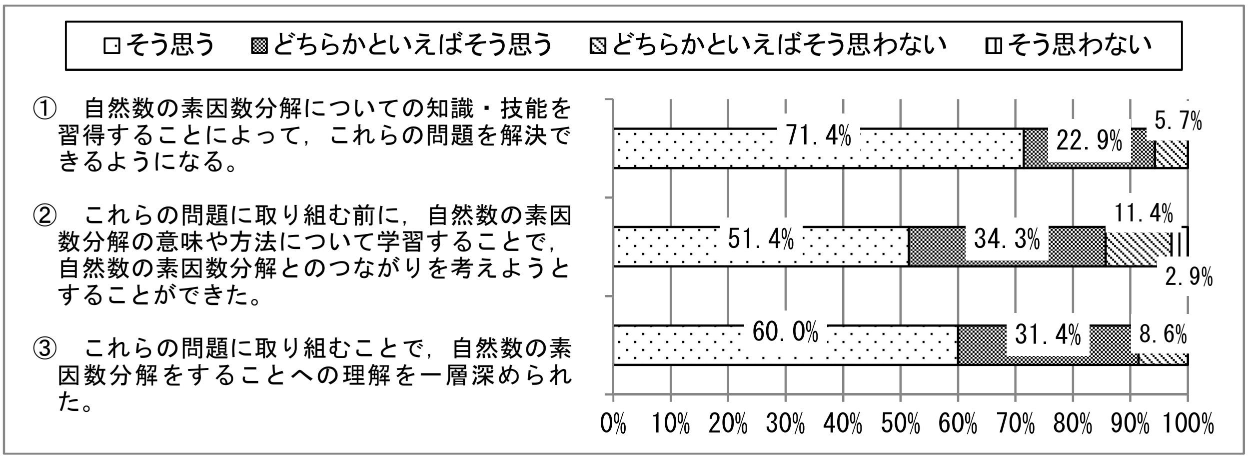

図３　練習問題に取り組んだ際の自然数の素因数分解とのつながりに対する意識

次に，上記６の(3)の本時（第３時）の学習に取り組んだ際の，自然数の素因数分解に対する考え方について生徒にたずねた。**図４**は，その結果をグラフに表したものである。(「調査Ｂ」の回答に基づく。)

④の設問に対する結果は，「そう思う」，「どちらかといえばそう思う」を合わせると 85.7% であった。本時（第３時）の課題は，直接的に自然数の素因数分解がかかわらないように見えそうである。しかしながら，学級の８割を超える生徒が，何かしらの自然数の素因数分解とのつながりを探りながら学習に取り組んでいた状況が明らかになった。

⑤の設問に対する結果は,「そう思う」,「どちらかといえばそう思う」を合わせると 94.3%であった。この事実は，９割を超える生徒が，本時の課題に対する結果を導く際に，論理（つながり）をつくる上で自然数の素因数分解が欠かせない知識・技能であると肯定的に認めた姿だと考える。そもそも，本時の課題の結果を導くためには，自然数の素因数分解の結果を基にして，それをどのように捉え，解釈すればよいかといった考察が不可欠である。自然数の素因数分解が，新たな知識（結果）をつくるための手段として認識され，その有用性を感じたのではないかと推察する。その根拠として，⑥の設問に対して，９割弱の生徒が「そう思う」,「どちらかといえばそう思う」と回答している状況が挙げられる。

以上,「調査Ｂ」への回答に基づき，練習問題に取り組んだ際の自然数の素因数分解とのつながりに対する意識，本時（第３時）の学習に取り組んだ際の意識について探ってきた。その結果，学級の多数の生徒が，自然数の素因数分解とのつながりを意識して，問題の解決に当たっていた姿が明らかになったと考える。したがって，上記６の⑶に示した指導計画における授業において，全体的に自然数の素因数分解とのつながりを意識した学びがなされていたと考える。

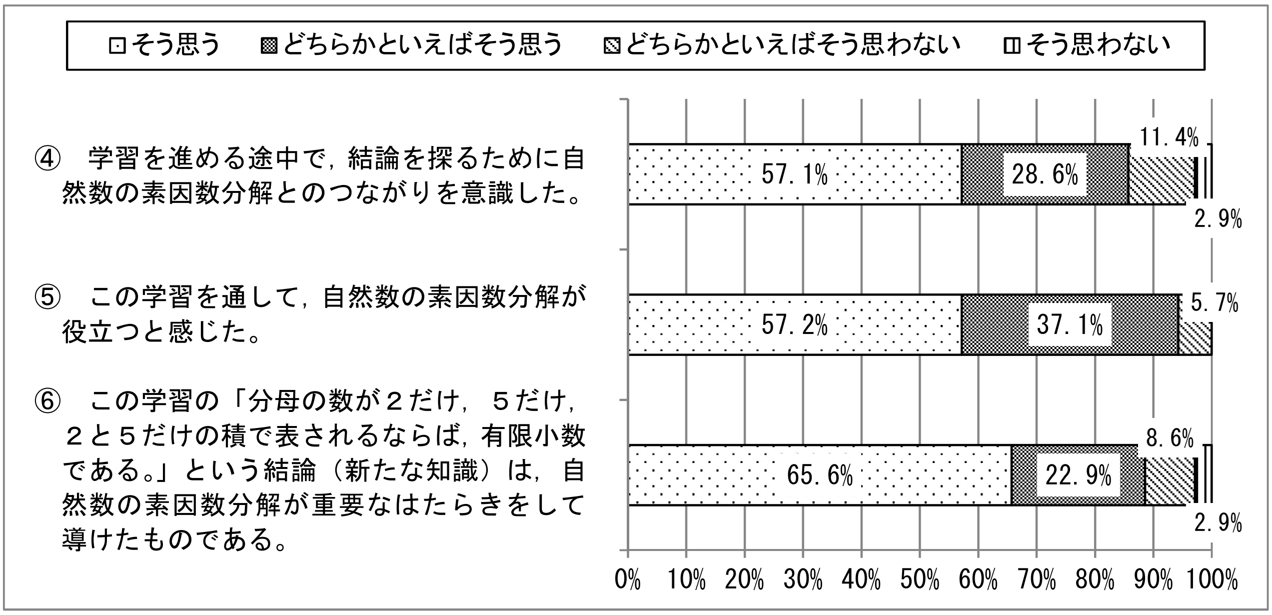

図４　本時（第３時）の学習に取り組んだ際の意識

イ　考えの伝達や討議等の交流をする場の設定の効果について

上記６の⑶の本時（第３時）の学習に取り組んだ際の，小集団（４人グループ）での活動に対する考えを生徒にたずねた。**図５**は，その結果をグラフに表したものである。(「調査Ｂ」の回答に基づく。)

①，②どちらの設問に対しても，９割を超える生徒が「そう思う」,「どちらかといえばそう思う」と回答した。この結果から，学級全体の傾向として，小集団（４人グループ）での活動の効果を肯定的に捉えていると考えてよいだろう。その背景には，自然数の素因数分解をどのように関連付けて説明すれば妥当性のある表現になるかといった小集団での意見の交流を発端として， 提案された考えがよりよいものに高められ，一人一人の理解が促進されたことがあるのではないかと推察する。

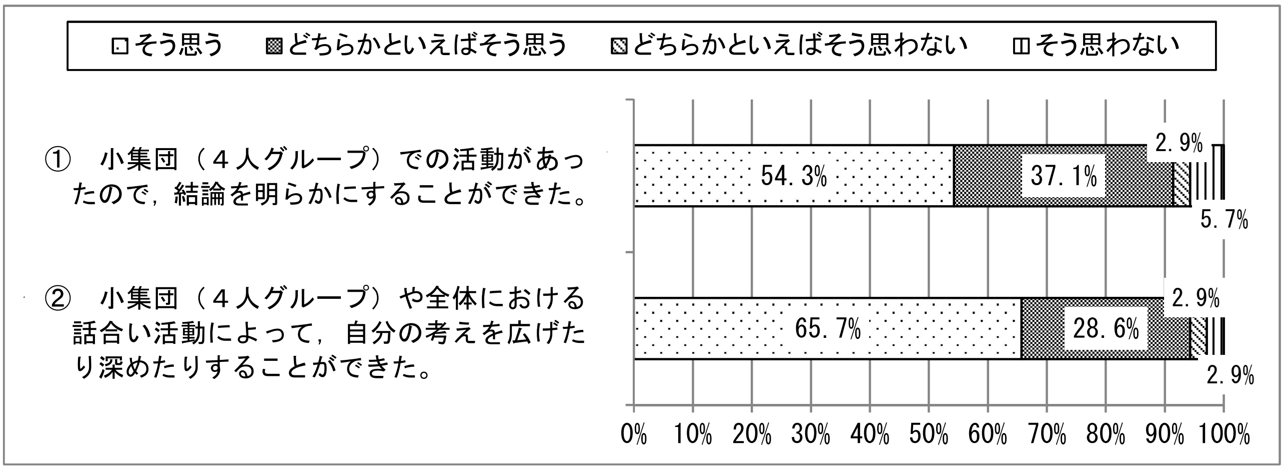

図５　小集団（４人グループ）での活動に対する考え

例えば，本時の学習を進める中で，課題に対する結果を「素因数分解して，２と５の積になっていればよい」としてよいのではないかという場面があった。多くの生徒がこの意見を支持していた中で，何人かの生徒が「$\frac{1}{8}$や$\frac{1}{16}$のように，分母を素因数分解した結果が２の累乗だけになってしまう単位分数もあるので，それではまずいのではないか」と言って，再検討をすることになった。その後，再度，小集団での話合いをする時間を確保し，３つの場合があることを説明すればよいのではないかという合意がなされた。この合意の下，個人で整理して課題に対する結果を記述したものが**表５**の「生徒の考察」である。表現に差異があり，中には不十分な記述もあるが，前述したとおり，数学の事実として妥当性があり，一人一人の理解が促進された記述が多く認められる。この生徒たちの姿から，考えの伝達や討議などの交流をする場の設定によって，他者の考えを関連付け，自分の考えを豊かにする効果をもたらしたと考えられる。すなわち，考えの伝達や討議などの交流をする場は，生徒の学びを深めることに作用すると言えよう。

ウ　数の性質を見いだし考察する力を養うことにつながったか

上記アでは，「調査Ｂ」の回答に対する分析に基づき，練習問題に取り組む際や，本時（第３時）の学習に取り組んだ際に，学級の全体的な傾向として，自然数の素因数分解とのつながりを意識して問題の解決に当たっていた姿を確認した。また，上記イでは，「調査Ｂ」の回答に対する分析並びに，本時（第３時）の学習における生徒の記述の様子に基づき，考えの伝達や討議などの交流をする場の設定が，生徒の学びを深めることに作用している様子を見いだしてきた。

これらの状況や事実は，いずれも生徒自身によって，自然数の素因数分解とのつながりを探り，問題を解決したり，新たな知識をつくったり，得たりしようとする行為が表出された姿である。すなわち，数の性質を見いだし考察する力を養うことにつなげられたのではないかと考える。

表５　個人で整理した課題に対する結果の記述

番号	個人で整理した課題に対する結果の記述
1	素因数分解して，２だけ，５だけをかける数，２×５をかける数で表せる。
2	記述なし
3	２の累乗・５の累乗・２の累乗×５・２×５の累乗・２の累乗×５の累乗
4	素因数分解して，２と５の倍数（３や７などの倍数は除く）累乗→2^2×５などの数が有限小数
5	素因数分解して２と５の積，２と５の累乗，２×５×５など２と５の積または２，５だけの数だったら有限小数
6	分母が２と５だけを使って表せる２と５の倍数と，５だけを使って表せる５の倍数と，２だけを使って表せる２の倍数の単位分数が有限小数になる。
7	素因数分解をして，・２のるい乗　・５のるい乗　・２と５，それぞれのるい乗で表せる数
8	素因数分解で，２の数だけで表せる数，５の数だけで表せる数，２×５で表せる。
9	分母を素因数分解をしたときに，２か５のどちらかまたは２と５の２つからその数ができていればよい。
10	素因数分解し，２か５，またはそのどちらも使い表すことができる数
11	素因数分解をして，２と５の積になり，そして，２と５で表せる数になっていればよい。
12	素因数分解して，２と５，２だけ，５だけの積になっていれば良い。
13	数が２か５でわれる数の場合，2^3×5^8とかのやり方でやってもよい。
14	素因数分解して，２か５，２と５で表すことのできる数 １　２の数だけで表せる数 ２　５の数だけで表せる数 ３　２と５の数で表せる数
15	単位分数の分母が素因数分解したときに，２と５だけ，もしくは２だけ，５だけで表すことができる場合，有限小数になる。
16	素因数分解して，２か５または，２と５の積になっていればよい。
17	２の累乗になる数，５の累乗になる数，２と５を使って表せる数
18	素因数分解したときに，２か5か，２と５両方で表せるものならば有限小数になる。
19	２か５の累乗である数や，素因数分解をして，２と５だけで表せる数が分母なら有限小数である。
20	素因数分解して，２と５をそれぞれいくつかずつ使って表せる数
21	分母を素因数分解して，２か５，または，２と５が入っていればよい。
22	分母が,「２の累乗」,「５の累乗」,「２×５のどちらかが累乗」の３パターンのときに有限小数になる。
23	素因数分解で，分母が「２だけで表せる数」と「５だけで表せる数」また「２×５などで表せる数」
24	分母が２の累乗，５の累乗，２と５の累乗を使って表せる。
25	素因数分解で，2^x ，2^x×５，5^x，5^x×２になると有限小数
26	①素因数分解の結果，２と５の積になるもの ②素因数分解の結果，２の累乗になるもの ③素因数分解の結果，５の累乗になるもの
27	パターン１　２だけの数で表すことができる数 パターン２　５の数だけで表すことができる数 パターン３　２，５どちらもの数を使って表すことができる数
28	２，５の累乗，２と５の公倍数で表せる数
29	素因数分解をして，２か５またはその両方で表せればよい。
30	分母に・・・ ・４の倍数が残る数　・25 の倍数が残る数　・10 の倍数が残る数　・５の数　・２の数

31	５のみを使って表せる場合，２のみを使って表せる場合，２と５のみを使って表せる場合の３パターン存在する。
32	素因数分解して，２と５の積になっている数，２か５の累乗で表せる数が分母の場合，有限小数になる。
33	素因数分解をして，２^{x}，２^{x}×５，５^{x}，５^{x}×２のどれかになれば良い。
34	記述なし
35	●分母を素因数分解して・・・ ①２だけで表せるもの　②５だけで表せるもの　③２と５で表せるもの（累乗を使ってもよい）は，有限小数といえる。
36	分母を素因数分解したとき，２，５，または２と５だけで表すことができる数

７　研究のまとめ

数の性質を見いだし考察する力を養う授業づくりを,「自然数を素数の積として表すこと」を用いる学習において研究した結果，次の事実が明らかになった。

○　「自然数を素数の積として表すこと」の学習において，目的をもって自然数の素因数分解を用いることができる授業づくりをすれば,生徒は自然数の素因数分解の有用性について学びを深め，数の性質を見いだし考察する力を養うことにつなげられる。

○　（難易度や問い方が工夫された）練習問題に取り組む場の設定は，習得した知識・技能とのつながりに対する意識を誘発し，導いた結果やその価値を振り返って自覚化する場面として機能する。

８　今後の課題

研究の結果，次の２点を課題としてさらに研究を進めたい。

○　「自然数を素数の積として表すこと」のよさが実感できる素材の開発

○　問題の状況や場面に応じて活用できる汎用的な知識・技能に高める手立て

【引用文献等】

1)　永田潤一郎　「数学的活動をつくる」　東洋館出版社　2012（平成 24）年 10 月 10 日

2)　杉山吉茂　「中等科数学科教育学序説　杉山吉茂教授講義筆記」　東洋館出版社　2009 年 12 月７日

3)「学習指導要領データベース」 国立教育政策研究所　2014 年 12 月 26 日　(https://www.nier.go.jp/guideline/)
最終検索日　令和元年６月 18 日

4)　齋藤昇・秋田美代・小原豊編著　「深い学びを支える数学教科書の数学的背景」　東洋館出版社
2017（平成 29）年９月７日

5)　1)に同じ

6)　金本良通　「数学的コミュニケーション能力の育成」　明治図書　1998 年４月